Cours de mathématiques M.P.S.I.

D'après les cours de M. De Granrut

Henriet Quentin
Ausseil Lucas
Perard Arsène
Philipp Maxime

Développement limité

1. Définition

1.1. Développement limité en 0

Définition :

On dit qu'une fonction f admet un développement limité en 0 à l'ordre n (noté $\mathrm{DL}_n(0)$) s'il existe $n+1$ réels $a_0, \ldots, a_n$, une fonction $\varepsilon\ :\ D_f \to \mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{0} \varepsilon = 0$ et $\forall\, x \in D_f,\ \ f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \underbrace{x^n \varepsilon(x)}_{o(x^n)}$

Remarque :

Si f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur un voisinage de 0, la formule de Taylor-Young donne un $\mathrm{DL}_n(0)$ de f.

Proposition :

Si f admet un $\mathrm{DL}_n(0)$, celui-ci est unique, c'est-à-dire que les réels $a_0, \ldots, a_n$ sont uniques.

Preuve :

Supposons que $\forall\, x \in D_f,\ \ f(x) = a_0 + \ldots + a_n x^n + x^n \varepsilon_1(x) = b_0 + \ldots + b_n x^n + x^n \varepsilon(x)$ avec $(a_0, \ldots, a_n) \neq (b_0, \ldots, b_n)$

On note p le plus petit entier tel que $a_p \neq b_p$, et donc $\forall\, k < p,\ \ a_k = b_k$

Donc $\forall\, x \in D_f,\ \ a_p x^p + \ldots + a_n x^n + x^n \varepsilon_1(x) = b_p x^p + \ldots + b_n x^n + x^n \varepsilon_2(x)$

$$\Leftrightarrow\ a_p + \underbrace{a_{p+1} x}_{\substack{\downarrow_{x\to 0}\\ 0}} + \ldots + \underbrace{a_n x^{n-p}}_{\substack{\downarrow_{x\to 0}\\ 0}} + \underbrace{x^{n-p} \varepsilon_1(x)}_{\substack{\downarrow_{x\to 0}\\ 0}} = b_p + \underbrace{b_{p+1} x}_{\substack{\downarrow_{x\to 0}\\ 0}} + \ldots + \underbrace{b_n x^{n-p}}_{\substack{\downarrow_{x\to 0}\\ 0}} + \underbrace{x^{n-p} \varepsilon_2(x)}_{\substack{\downarrow_{x\to 0}\\ 0}}$$

Par passage à la limite en 0, on obtient $a_p = b_p$: contredit l'hypothèse de départ, donc $(a_0, \ldots, a_n) = (b_0, \ldots, b_n)$.

Définition :

Si f admet un $\mathrm{DL}_n(0)$, la partie polynôme $a_0 + \ldots + a_n x^n$ s'appelle la partie régulière du DL, souvent notée $\mathrm{DL}_n(0)$.

Propriété : principe de troncature :

Si f admet un $\mathrm{DL}_n(0)$: $\forall x \in D_f,\ \ f(x) = a_0 + \ldots + a_n x^n + o(x^n)$, alors $\forall\, p \leqslant n,\ \ p \in \mathbb{N},\ \ f$ admet un $\mathrm{DL}_p(0)$ qui est $f(x) = a_0 + \ldots + a_p x^p + o(x^p)$.

Proposition :

Si f est paire (resp. impaire) et admet un $\mathrm{DL}_n(0)$, alors celui-ci ne contient que des puissances paires (resp. impaires).

Preuve (cas pair) :

$\forall\, x \in D_f,\ \ -x \in D_f,\ \ f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + o(x^n)$ et $f(-x) = a_0 - a_1 x + \ldots + (-1)^n a_n x^n + o(x^n)$

Or, $f(x) f(-x)$ donc par unicité du développement limité, $\begin{cases} a_0 = a_0 \\ a_1 = -a_1 \\ \vdots \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_3 = 0 \\ \vdots \end{cases}$

1.2. Développements limités usuels

$$\mathrm{e}^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \ldots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} + o(x^n)$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\mathrm{sh}(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\mathrm{ch}(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

En particulier : $\sqrt{1+x}=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}+o(x^3)$ et $\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{x}{2}+\frac{3}{8}x^2-\frac{5}{16}x^3+o(x^3)$

$\tan(x)=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}x^5+\frac{17}{315}x^7+o(x^8)$

$\mathrm{th}(x)=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5-\frac{17}{315}x^7+o(x^8)$

$\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\ldots-\frac{x^n}{n}+o(x^n)$

$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots+(-1)^n\frac{x^n}{n}+o(x^n)$

$\arctan(x)=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+o(x^{2n+2})$

$\mathrm{argth}(x)=x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+o(x^{2n+2})$

$\arcsin(x)=x+\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1\times 3}{2\times 4}\frac{x^5}{5}+o(x^5)$

$\mathrm{argsh}(x)=x-\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1\times 3}{2\times 4}\frac{x^5}{5}+o(x^5)$

1.3. Développement limité d'ordre n en x_0

Principe :

On pose $x=x_0+h \Leftrightarrow h=x-x_0 \underset{x\to x_0}{\to} 0 \qquad f(x)=f(x_0+h)$

Si $h\mapsto f(x_0+h)$ admet un développement limité à l'ordre n en 0, $f(x_0+h)=a_0+a_1h+\ldots+a_nh^n+o(h^n)$

Alors f admet un développement limité à l'ordre n en x_0 qui est $f(x)=a_0+(x-x_0)a_1+\ldots+(x-x_0)^n a_n+\underset{x\to x_0}{o}((x-x_0)^n)$

Remarque :

Si f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I, alors $\forall x_0\in I$, f admet une développement limité d'ordre n en x_0 donné par la formule de Taylor-Young : $f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\underset{x\to x_0}{o}((x-x_0)^n)$

1.4. Développement limité d'ordre n en ∞

Principe :

On pose $x=\frac{1}{h} \Leftrightarrow h=\frac{1}{x}\underset{x\to\infty}{\to}0 \qquad f(x)=f\left(\frac{1}{h}\right)$

Si $h\mapsto f\left(\frac{1}{h}\right)$ admet un développement limité à l'ordre n en 0, $f\left(\frac{1}{h}\right)=a_0+\ldots+a_nh^n+o(h^n)$

Alors f admet un développement limité d'ordre n en ∞ qui est $f(x)=a_0+\frac{a_1}{x}+\ldots+\frac{a_n}{x^n}+\underset{x\to\infty}{o}\left(\frac{1}{x^n}\right)$

1.5. Dérivabilité d'un développement limité

Proposition :

1. Si $x_0\in D_f$, f admet un $\mathrm{DL}_0(x_0) \Leftrightarrow f$ est continue en x_0 et $f(x_0)=a_0$
2. Si $x_0\in\overline{D_f}\setminus D_f$, f admet un $\mathrm{DL}_0(x_0) \Leftrightarrow f$ est prolongeable par continuité en x_0 en posant $f(x_0)=a_0$.
3. Si $x_0\in D_f$, f admet un $\mathrm{DL}_1(x_0) \Leftrightarrow f$ est dérivable en x_0 et $f'(x_0)=a_1$.

Remarque :

Ce résultat ne se généralise pas pour un développement limité d'ordre $n\geqslant 2$: une fonction pour admettre un développement limité d'ordre 2 en x_0 sans que sa dérivée soit dérivable en x_0.

Preuve (1.) :

$\Rightarrow$: f admet un développement limité d'ordre 0 en $x_0 \Leftrightarrow \exists a_0\in\mathbb{R}$ tel que $\forall x\in D_f$,

$f(x)=a_0+\underset{x\to x_0}{o}((x-x_0)^0)=a_0+\underset{x\to x_0}{o}(1) \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x)=a_0=f(x_0)+0$

$\Leftarrow$: On pose $a_0=f(x_0)$. $\forall x\in D_f$, $f(x)=a_0+f(x)-a_0$: il s'agit d'un $\mathrm{DL}_0(x_0)$, car $f(x)-a_0\underset{x\to x_0}{\to}0$

2. Opérations

2.1. Somme et produit

Proposition :

Si f et g admettent des $\mathrm{DL}_n(0)$: $f(x)=P(x)+o(x^n)$ et $g(x)=Q(x)+o(x^n)$, avec $P,Q\in\mathbb{R}_n[X]$
Alors $f+g$ admet un $\mathrm{DL}_n(0)$: $(f+g)(x)=P(x)+Q(x)+o(x^n)$
Et fg admet un $\mathrm{DL}_n(0)$: $(fg)(x)=\mathrm{T}(P(x),Q(x))+o(x^n)$, où $\mathrm{T}(P(x),Q(x))$ est obtenu à partir de $P(x)Q(x)$ en ne gardant que les termes de degré inférieur ou égal à n.

Remarque :

Si $f(x)$ commence par $a_p x^p$ et $g(x)$ par $a_q x^q$, pour obtenir un $\mathrm{DL}_n(0)$ de fg, il suffit de prendre un $\mathrm{DL}_{n-q}(0)$ pour f et un $\mathrm{DL}_{n-p}(0)$ pour g.

2.2. Quotient

Principe :

Pour obtenir un $\mathrm{DL}_n(0)$ de $\dfrac{1}{f(x)}$, on utilise $\dfrac{1}{1+u}$ ou $\dfrac{1}{1-u}$ dans le cas où $f=1+u$ ou $1-u$ avec $u\underset{0}{\to}0$.

2.3. Intégration d'un développement limité

Proposition :

Si f est continue sur I et si f admet un $\mathrm{DL}_n(0)$: $f(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k+o(x^n)$ et si F est une primitive de f,

Alors F admet un $\mathrm{DL}_{n+1}(0)$: $F(x)=F(0)+\sum_{k=0}^{n} a_k\dfrac{x^{k+1}}{k+1}+o(x^{n+1})$.

Preuve :

Si $f(x)=o(x^n)$: on a $F(x)-F(0)=\int_0^x f(t)\,dt$ et $\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^n}=0$.

$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0$ tel que $\forall x\in I,\ |x|\leqslant\delta\Rightarrow|f(x)|\leqslant\varepsilon|x^n|$: On a donc $\forall t\in[0,x],\ |f(t)|\leqslant\varepsilon|t^n|\leqslant\varepsilon|x^n|$.

$|F(x)-F(0)|=\left|\int_0^x f(t)\,dt\right|\leqslant\int_{\min(0,x)}^{\max(0,x)}|f(t)|\,dt\leqslant\int_{\min(0,x)}^{\max(0,x)}\varepsilon|x^n|\,dt=\varepsilon|x^{n+1}|$ Donc $F(x)-F(0)=o(x^{n+1})$

Soient $g(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k+o(x^n)$, G une primitive de g. On pose $f(x)=g(x)-\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$.

$$F(x)=G(x)-\sum_{k=0}^{n} a_k\frac{x^{k+1}}{k+1}+c \iff \underbrace{F(x)-F(0)}_{=o(x^{n+1})}=G(x)-G(0)-\sum_{k=0}^{n} a_k\frac{x^{k+1}}{k+1} \iff G(x)=G(0)+\sum_{k=0}^{n} a_k\frac{x^{k+1}}{k+1}+o(x^{n+1}).$$

Remarque :

On ne peut pas dériver un développement limité, sauf si on peut intégrer celui de la dérivée :
Si f' admet un $\mathrm{DL}_{n-1}(0)$ alors son développement limité est égal à la dérivée du développement limité de f.

2.4. Composition

Proposition :

Si f admet un $\mathrm{DL}_n(0)$: $f(x)=a_0+\ldots+a_n x^n+o(x^n)$ et u admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ et $u\underset{0}{\to}0$,
Alors $f\circ u$ admet un $\mathrm{DL}_n(0)$: $f\circ u(x)=a_0+a_1u(x)+\ldots+a_n(u(x))^n+o(x^n)$
On peut ensuite remplacer $u(x)$ par son développement limité.

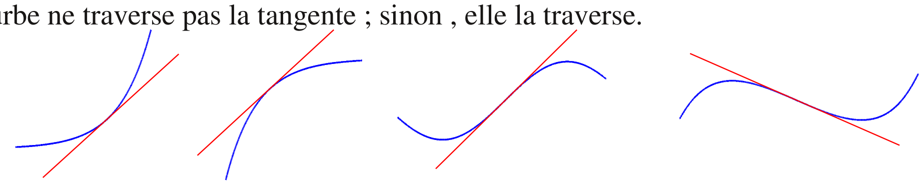
3. Applications

3.1. Recherche d'équivalents

Si $f(x)=a_p x^p+\ldots+a_n x^n+o(x^n)$ avec $a_p\neq 0$, alors $f(x)\sim a_p x^p$, premier terme non nul du développement limité.
Le problème est de trouver à quel ordre le développement doit être effectué pour trouver ce terme non nul ;
La parité des fonctions peut y aider.
La recherche d'équivalent conduit généralement au calcul de limites de fonctions.

3.2. Étude locale au voisinage de x_0 et au voisinage de ∞

Si f admet un $DL_n(x_0)(n\geqslant 2)$: $f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+\ldots+a_n(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n)$
L'équation de la tangente à la courbe en x_0 est alors : $y(x)=a_0+a_1(x-x_0)$
Le terme non nul suivant du développement limité permet d'étudier la position entre la courbe et la tangente :
$f(x)-(a_0+a_1(x-x_0))\underset{x_0}{\sim}a_p(x-x_0)^p$ Le signe de ce terme dépend de a_p et de la parité de p.
Si p est pair, la courbe ne traverse pas la tangente ; sinon , elle la traverse.



Pour l'étude des branches infinies, on peut utiliser un développement asymptotique :

$$f(x)=\underbrace{a_{-1}x+a_0}_{\text{éq. de l'asymptote}}+\underbrace{\frac{a_1}{x}+\ldots+\frac{a_n}{x^n}}_{\text{position selon le signe}}+o\left(\frac{1}{x^n}\right)$$

3.3. Allure locale des courbes paramétrées

Soient $\vec{f}:\begin{array}{ccc} I & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & (x(t),y(t)) \end{array}$ de classe $\mathscr{C}^n$, $t_0\in I$: $\vec{f}(t_0+h)=\vec{f}(t_0)+\vec{f}'(t_0)+\dfrac{h^2}{2}\overrightarrow{f''}(t_0)+\ldots+\dfrac{h^n}{n!}\overrightarrow{f^{(n)}}(t_0)+\vec{o}(h^n)$

On suppose l'existence de deux entiers p et q $\geqslant 1$ tels que :

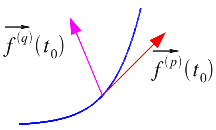
– $\overrightarrow{f^{(p)}}(t_0)$ est le premier vecteur non nul

– $\overrightarrow{f^{(q)}}(t_0)$ est le premier vecteur dérivé non colinéaire à $\overrightarrow{f^{(p)}}(t_0)$

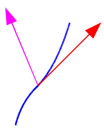
Alors $\vec{f}(t_0+h)=\vec{f}(t_0)+\left(\dfrac{h^p}{p!}+\alpha_1\dfrac{h^{p+1}}{(p+1)!}+\ldots+\alpha_{q-p-1}\dfrac{h^{q-1}}{(q-1)!}\right)\overrightarrow{f^{(p)}}(t_0)+\dfrac{h^q}{q!}\overrightarrow{f^{(q)}}(t_0)+\vec{o}(h^p)$

On obtient dans le repère $(M_0,\overrightarrow{f^{(p)}}(t_0),\overrightarrow{f^{(q)}}(t_0))$: $\begin{cases} X=\dfrac{h^p}{p!}+\dfrac{h^{p+1}}{(p+1)!}\alpha_1+\ldots+\dfrac{h^{q-1}}{(q-1)!}\alpha_{q-p-1}+o(h^p)\underset{h\to 0}{\sim}\dfrac{h^p}{p!} \\ Y=\dfrac{h^q}{q!}+o(h^q)\underset{h\to 0}{\sim}\dfrac{h^q}{q!} \end{cases}$

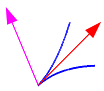
On obtient quatre cas différents :



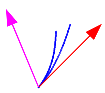
p est impair, et q est pair : point ordinaire



p est impair, et q est impair : point d'inflexion



p est pair, et q est impair : point de rebroussement de première espèce



p est pair, et q est pair : point de rebroussement de seconde espèce

* * * * *

Mis à jour le 27.07.10